

A P P E N D I C E

APPENDICE I

FONCTIONS D'ONDE INDIVIDUELLES

AI1 - Fonctions d'onde liées des nucléons du noyau

AI1.1 - Partie orbitale

Nous utilisons les fonctions d'onde normalisées d'un oscillateur harmonique isotrope :

$$h \varphi_{n\ell m_\ell}(\vec{r}) = (2n + \ell + \frac{3}{2}) \hbar \omega \varphi_{n\ell m_\ell}(\vec{r})$$

où $n = 0, 1, 2, \dots$ et $\ell = 0, 1, 2, \dots$ correspondant respectivement à la notation s p d f g...

$$h = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

Les fonctions d'onde $\varphi_{n\ell m_\ell}(\vec{r})$ s'écrivent :

$$\varphi_{n\ell m_\ell}(\vec{r}) = u_{n\ell}(r) Y_m^\ell(\hat{r})$$

où \hat{r} représente les angles (θ, φ) qui définissent la direction du vecteur \vec{r} . Nous utilisons les harmoniques sphériques définies à partir de celles utilisées par Messiah, de la façon suivante :

$$Y_m^\ell(\hat{r}) = (-i)^\ell \psi_{\ell m}(\hat{r})$$

$$(Y_m^\ell(\hat{r}))^* = (-)^{\ell-m} Y_{-m}^\ell(\hat{r})$$

$$\int Y_m^\ell(\hat{r})^* Y_{m'}^{\ell'}(\hat{r}) d\hat{r} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

Les fonctions radiales $u_{nl}(r)$ ont pour expression :

$$u_{nl}(r) = C_{nl} \alpha^{3/2+l} r^l e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 r^2} L_n^{\ell+1/2}(\alpha^2 r^2)$$

où $\alpha = \sqrt{\frac{m \omega}{\hbar}}$ est la constante de l'oscillateur harmonique

$$C_{nl} = \frac{1}{\pi^{1/4}} \sqrt{\frac{2^{n+l+2} n!}{(2n+2\ell+1)!!}} \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \\ \ell = 0, 1, 2, \dots \end{array}$$

$L_n^p(x)$ est un polynôme de Laguerre [14]

$$L_n^p(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(n+p)!}{(n-m)!(p+m)!} \frac{(-x)^m}{m!}$$

(avec une notation abusive pour les ! pour des valeurs demi-entières)

- Relation de récurrence

$$(n+1) L_{n+1}^p(x) = (n+p) L_n^{p-1}(x) + (n+1-x) L_n^p(x)$$

- Valeurs particulières :

$$L_0^\alpha(x) = 1$$

$$L_1^\alpha(x) = (\alpha+1) - x$$

$$L_2^\alpha(x) = \frac{1}{2} [(\alpha+1)(\alpha+2) - 2(\alpha+2)x + x^2]$$

$$L_3^\alpha(x) = \frac{1}{6} [(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) - 3(\alpha+2)(\alpha+3)x + 3(\alpha+3)x^2 - x^3]$$

- Comportement local à l'origine de la fonction $u_{nl}(r)$

C_{nl} et $\alpha^{3/2+l}$ sont strictement positifs

$u_{nl}(r) \sim \text{sgn } r^\ell (1 - 1/2 \alpha^2 r^2 + \dots)(A_0 - A_1 \alpha^2 r^2 + \dots)$ avec A_0, A_1, \dots

strictement positifs

Si $\ell = 0$: valeur positive à l'origine

$\ell \neq 0$: valeur nulle à l'origine et la première dérivée non-nulle est positive

$u_{nl}(r)$ est à l'origine localement positive ou nulle

AI1.2 - Expression des fonctions d'onde liées en couplage j-j

Soit $x = (\vec{r}, \vec{\sigma}, \vec{\tau})$ les variables d'espace, spin et isospin

$$\begin{aligned} \varphi_{n\ell j m_j t m_t} &= \langle \vec{r}, \vec{\sigma}, \vec{\tau} | n, \ell, s, j, m_j, t, m_t \rangle \\ &= \left\{ \sum_{\substack{m_\ell \\ m_s}} (\ell, s, m_\ell, m_s | j, m_j) \langle \vec{r} | n, \ell, m_\ell \rangle \langle \vec{\sigma} | s, m_s \rangle \right\} \langle \vec{\tau} | t, m_t \rangle \end{aligned}$$

Il est à noter que dans cette expression la partie radiale $u_{n\ell}(r)$ peut être mise en facteur.

AI2 - Fonction d'onde du nucléon libre dans une onde s

Soit $(x_p) = (\vec{r}_p, \vec{\sigma}_p, \vec{\tau}_p)$ les variables d'espace de spin et d'isospin du nucléon projectile (indice p)

$$\varphi(\vec{r}_p, \vec{\sigma}_p, \vec{\tau}_p) = \langle \vec{r}_p, \vec{\sigma}_p, \vec{\tau}_p | \varepsilon, s, m_{s_p}, t, m_{t_p} \rangle$$

ε est le paramètre énergie dans le continu

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}_p, \vec{\sigma}_p, \vec{\tau}_p) &= \langle \vec{r}_p | \varepsilon, \ell = 0 \rangle \langle \vec{\sigma}_p | s, m_{s_p} \rangle \langle \vec{\tau}_p | t, m_{t_p} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \varphi_\varepsilon(r_p) \chi_{m_{s_p}}^s(\vec{\sigma}_p) \chi_{m_{t_p}}^t(\vec{\tau}_p) \end{aligned}$$

$$[Y^{[\ell_1]} || Y^{[\ell_2]} || Y^{[\ell_3]}] = (-)^{\ell_1} (-i)^{-\ell_1 + \ell_2 + \ell_3} \frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les Y satisfaisant la convention (A3) sont ceux définis en appendice (AII.1)

Soit $J^{[1]}$

$$\begin{cases} J_0^{[1]} = -i J_z \\ J_1^{[1]} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i J_x - J_y) \\ J_{-1}^{[1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (i J_x + J_y) \end{cases}$$

$$[j_1 || J^{[1]} || j_2] = s_{j_1 j_2} (-)^{2j_1 - 1} (-i) \sqrt{J(J+1)(2J+1)}$$

$$[1/2 || \sigma^{[1]} || 1/2] = (-i) \sqrt{6}$$

avec $\sigma^{[1]} = 2 s^{[1]}$

Enfin pour un opérateur hermitique :

$$[j_3 || T_{j_2} || j_1] = (-)^{j_1 - 2j_2 - j_3} [j_1 || T_{j_2} || j_3]^*$$

AII2 - Remarque : Passage du produit scalaire au produit couplé à 0

Procédons par identification :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = \sigma_x \sigma_x + \sigma_y \sigma_y + \sigma_z \sigma_z$$

$$\begin{aligned} \sigma^{[1]}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (i \sigma_x - \sigma_y) \\ \sigma^{[1]}_{-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (i \sigma_x + \sigma_y) \\ \sigma^{[1]}_0 &= -i \sigma_z \end{aligned}$$

$$[\sigma^{[1]} \sigma^{[1]}]^0 = \sum_m (11m-m|00) \sigma^{[1]}_m \sigma^{[1]}_{-m}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_m \frac{(-)^{\nu-m}}{\hat{y}} \sigma_m^{[\nu]} \sigma_{-m}^{[\nu]} \quad \nu = 1 \\
 &= \frac{1}{\hat{y}} \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} \\
 \vec{\sigma} \vec{\sigma} &= \hat{y} \left(\sigma^{[\nu]} \sigma^{[\nu]} \right) [0]
 \end{aligned}$$

Nous poserons pour généraliser $\sigma^{[\nu]} = 1$ pour $\nu = 0$

$$\begin{aligned}
 (\vec{\sigma} \vec{\sigma})_\nu &= \vec{\sigma} \vec{\sigma} \quad \text{pour } \nu = 1 \\
 &= 1 \quad \text{pour } \nu = 0
 \end{aligned}$$

III3 - Valeurs particulières

$$[e | |Y^{[0]} | |e] = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{4\pi}}$$

$$[0 | |Y^{[0]} | |0] = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$[e | |Y^{[e]} | |0] = [0 | |Y^{[e]} | |e] = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{4\pi}}$$

APPENDICE III

TECHNIQUE GRAPHIQUE DE COUPLAGE^[15]

Convention : Nous conviendrons, que dans les écritures de grandeurs couplées, l'ordre explicite du couplage sera celui de l'écriture de gauche à droite.

AIII1 - Introduction des "9j carrés"

AIII1.1 - Définitions

Dans ce qui suit on se limite à des systèmes qui commutent. Considérons le couplage de 4 systèmes distincts de moments cinétiques respectifs j_1, j_2, j_3, j_4 à un moment cinétique total J . Les deux modes de couplages $|(j_1 j_2)_{J_{12}}, (j_3 j_4)_{J_{34}}, JM\rangle$ et $|(j_1, j_3)_{J_{13}}, (j_2 j_4)_{J_{24}}, JM\rangle$ conduisent à deux systèmes distincts de vecteurs de base du sous espace de moment cinétique $(J M)$.

Par définition les symboles "9j carrés" sont les coefficients de la transformation unitaire permettant de passer d'une base à l'autre :

$$|(j_1 j_2)_{J_{12}}, (j_3 j_4)_{J_{34}}, JM\rangle = \sum_{J_{13} J_{24}} |(j_1 j_3)_{J_{13}}, (j_2 j_4)_{J_{24}}, J'M'\rangle$$

$$|(j_1 j_2)_{J_{12}}, (j_3 j_4)_{J_{34}}, JM\rangle |(j_1 j_3)_{J_{13}}, (j_2 j_4)_{J_{24}}, J'M'\rangle =$$

$$\delta_{JJ'} \delta_{MM'} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix}$$

AIII1.2 - Quelques propriétés des "9j carrés"

Leurs propriétés se déduisent directement des symboles $(9j)$ de Wigner

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} = \hat{j}_{12} \hat{j}_{34} \hat{j}_{13} \hat{j}_{24} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{pmatrix}$$

avec la notation $\hat{j} = \sqrt{2j+1}$

Précisons uniquement quelques propriétés spécifiques de ces "9j carrés" :

- 1 Symétrie par rapport à la première diagonale, mais contrairement aux 9j de Wigner pas de symétrie générale par rapport à la deuxième diagonale.
- 2 L'introduction d'un système fictif couplé à 0 permet d'inclure les symboles 6j à des phases près. En effet, par exemple :

$$|(j_1 j_2)_{J_{12}}, (j_3 0)_{j_3}, JM\rangle = |(j_1 j_2)_{J_{12}}, j_3, JM\rangle.$$

Cela permet donc le changement de base entre deux modes de couplage, pour un système formé de trois systèmes distincts couplés ensemble.

Les calculs ont été faits pour les 9 positions possibles du 0 dans le tableau à 9 éléments (cf Tableau T AIII).

- 3 On peut même aller jusqu'à interpréter le changement du sens du couplage de deux systèmes en introduisant deux zéros fictifs :

$$\begin{aligned} (j_1 j_2)_{J_{12}} &= (-)^{j_1+j_2-J_{12}} (j_2 j_1)_{J_{12}} \\ &= ((0 j_1)_{j_1}, (j_2 0)_{j_2})_{J_{12}} \\ (-)^{j_1+j_2-J_{12}} &= \begin{bmatrix} 0 & j_1 & j_1 \\ j_2 & 0 & j_2 \\ j_2 & j_1 & J_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tous ces résultats sont interprétés aisément par la technique graphique exposée ci-dessous.

TABLEAU T A III

Formulaire :

$$\begin{bmatrix} a & b & \lambda \\ c & d & \mu \\ \Lambda & \Sigma & J \end{bmatrix} = \begin{matrix} \hat{\lambda} & \hat{\mu} & \hat{\Lambda} & \hat{\Sigma} \\ \left\{ \begin{matrix} a & b & \lambda \\ c & d & \mu \\ \Lambda & \Sigma & J \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad \hat{\lambda} = \sqrt{2\lambda + 1}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & \lambda \\ a & b & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{a} \hat{b}}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ b & 0 & b \\ \lambda & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & \lambda \\ a & b & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & \lambda & \lambda \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j & j & 0 \\ k_1 & k_2 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & j & k_1 \\ j_2 & j & k_2 \\ J & 0 & J \end{bmatrix} = \frac{\hat{k}_1 \hat{k}_2}{\hat{j}} (-)^{j_1+2j_2+2k_1+k_2+3J+3j} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J \\ k_2 & k_1 & j \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} J & j_1 & j_2 \\ J & k_1 & k_2 \\ 0 & j & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & J & 0 \\ j_1 & k_1 & j \\ j_2 & k_2 & j \end{bmatrix} = \frac{\hat{j}_2 \hat{k}_2}{\hat{J}} (-)^{j_2+k_1+J+j} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J \\ k_2 & k_1 & j \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & j & j \\ J & j_1 & j_2 \\ J & k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J & J \\ j & j_1 & k_1 \\ j & j_2 & k_2 \end{bmatrix} = \frac{\hat{j}_2 \hat{k}_1}{\hat{J}} (-)^{j_2+k_1+J+j} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J \\ k_2 & k_1 & j \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} J & j_1 & j_2 \\ 0 & \mathcal{J} & \mathcal{J} \\ J & k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 & J \\ j_1 & \mathcal{J} & k_1 \\ j_2 & \mathcal{J} & k_2 \end{bmatrix} = \hat{j}_2 \hat{k}_1 (-)^{j_1+2j_2+2k_1+k_2+3J+3\mathcal{J}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k_2 & k_1 & \mathcal{J} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & J & j_2 \\ \mathcal{J} & 0 & \mathcal{J} \\ k_1 & J & k_2 \end{bmatrix} = \hat{j}_2 \hat{k}_1 (-)^{2j_1-j_2-k_1+2k_2+J+\mathcal{J}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k_2 & k_1 & \mathcal{J} \end{Bmatrix}$$

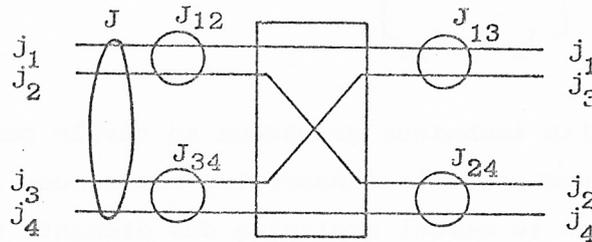
$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k_1 & k_2 & J \\ \mathcal{J} & \mathcal{J} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & k_1 & \mathcal{J} \\ j_2 & k_2 & \mathcal{J} \\ J & J & 0 \end{bmatrix} = \hat{J} \hat{\mathcal{J}} (-)^{k_1+j_2+J+\mathcal{J}} \begin{Bmatrix} k_2 & k_1 & J \\ j_1 & j_2 & \mathcal{J} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & j_1 & j_1 \\ j_2 & 0 & j_2 \\ j_2 & j_1 & J \end{bmatrix} = (-)^{j_1+j_2-J}$$

AIII2 - Interprétation graphique des "9j carrés"

AIII2.1 - Définitions

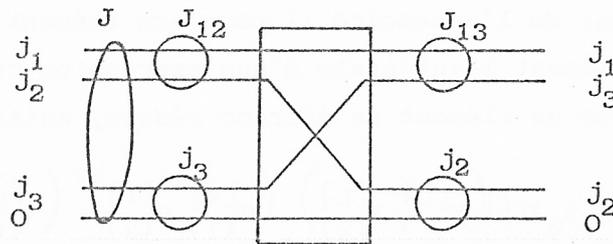
Chaque système sera représenté par une ligne que l'on affectera de la valeur du j correspondant. Les couplages seront indiqués par des anneaux groupant les lignes ainsi couplées. L'ordre explicite du couplage correspondra à la lecture des j de haut en bas. Les "9j carrés" seront représentés par des boîtes suivant le schéma :



$$|(j_1 j_2)_{J_{12}}, (j_3 j_4)_{J_{34}}, JM\rangle = \sum_{\substack{J_{13} \\ J_{24}}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} |(j_1 j_3)_{J_{13}} (j_2 j_4)_{J_{24}}, JM\rangle$$

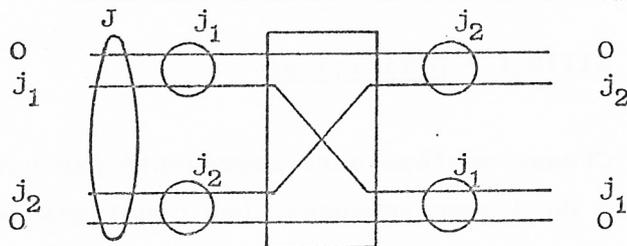
AIII2.2 - Couplage de 3 systèmes

Donnons à titre d'exemple le découplage et recouplage suivant :



$$|(j_1 j_2)_{J_{12}} j_3 J\rangle = |(j_1 j_2)_{J_{12}}, (j_3 0)_{j_3} J\rangle = \sum_{J_{13}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & 0 & j_3 \\ J_{13} & j_2 & J \end{bmatrix} |(j_1 j_3)_{J_{13}} j_2 J\rangle$$

AIII2.3 - Changement du sens du couplage :



$$|(j_1 j_2)^J_{12}\rangle = \begin{bmatrix} 0 & j_1 & j_1 \\ j_2 & 0 & j_2 \\ j_2 & j_1 & J_{12} \end{bmatrix} |(j_2 j_1)^J_{12}\rangle$$

Cette technique graphique se révèle particulièrement utile dans la réduction des produits tensoriels, comme nous allons le voir, à titre d'exemple, dans le calcul explicite des éléments de matrice réduit à deux corps. L'utilisation de "9j carrés" avec 0 permet de systématiser les calculs, tout en évitant la lourdeur des phases introduites par les symboles 6j de Wigner.

AIII3 - Exemple de réduction de produits tensoriels : calcul d'un élément de matrice réduit.

Pour utiliser la technique précédente, il est nécessaire d'adopter les conventions de l'appendice II pour les éléments de matrice réduits, à savoir, strictement l'intégrale d'une expression couplée à $J = M = 0$. Soit à calculer un élément de matrice réduit, antisymétrisé du type :

$$M = [(j_1 j_2)^J(t_1 t_2)T] \left| \left(\begin{matrix} [L] & [L] \\ Y_{(1)} & Y_{(2)} \end{matrix} \right)^{\circ} \left(\begin{matrix} [\nu] & [\nu] \\ \sigma_{(1)} & \sigma_{(2)} \end{matrix} \right)^{\circ} \left(\begin{matrix} [\mu] & [\mu] \\ \tau_{(1)} & \tau_{(2)} \end{matrix} \right)^{\circ} \right| [(k_1 k_2)^{\tilde{J}}(t'_1 t'_2)T]$$

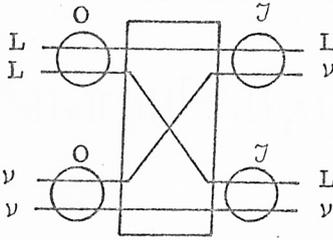
suivant la notation de l'appendice pour l'antisymétrisation.

Pour généraliser, nous conviendrons que $\sigma^{[o]}$ et $\tau^{[o]}$ sont des opérateurs unité. Spin et Isospin se séparent, de plus il faudra distinguer le calcul du terme direct de celui du terme d'échange.

AIII3.1 - Calcul du terme de spin

Nous reproduisons les schémas qui expliciteront la manipulation effectuée.

AIII3.1.1 - Terme direct

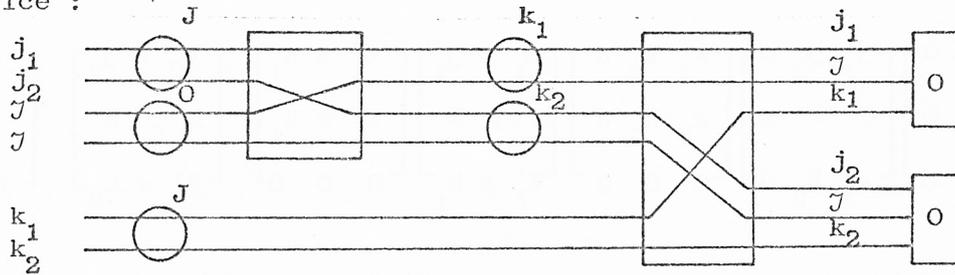


- Première étape; Séparation des variables de l'opérateur :

$$\left(Y_{(1)}^{[L]} Y_{(2)}^{[L]} \right)^0 \left(\sigma_{(1)}^{[\nu]} \sigma_{(2)}^{[\nu]} \right)^0 = \sum_J \begin{bmatrix} L & L & 0 \\ \nu & \nu & 0 \\ J & J & 0 \end{bmatrix} \left(Y_{(1)}^{[L]} \sigma_{(1)}^{[\nu]} \right)^{[J]} \left(Y_{(2)}^{[L]} \sigma_{(2)}^{[\nu]} \right)^{[J]}$$

- Deuxième étape; Séparation des variables de l'élément de

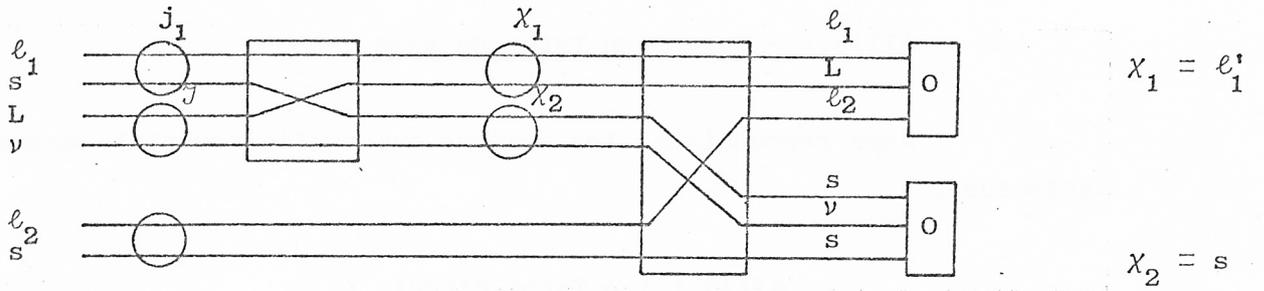
matrice :



$$[(j_1 j_2) J] \left| \left(\left(Y_{(1)}^{[L]} \sigma_{(1)}^{[\nu]} \right)^{[J]} \left(Y_{(2)}^{[L]} \sigma_{(2)}^{[\nu]} \right)^{[J]} \right)^0 \right| [(k_1 k_2) J] =$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ J & J & 0 \\ k_1 & k_2 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & J \\ k_1 & k_2 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[(\ell_1^s) j_1 \left| \left(Y_{(1)}^{[L]} \sigma_{(1)}^{[\nu]} \right)^{[J]} \right| (\ell_1^s) k_1 \right] \left[(\ell_2^s) j_2 \left| \left(Y_{(2)}^{[L]} \sigma_{(2)}^{[\nu]} \right)^{[J]} \right| (\ell_2^s) k_2 \right]$$

- Troisième étape; Séparation du spin du moment orbital :



$$[(e_1 s) j_1 || (\sigma^{[L]} \sigma^{[v]})^J || (e'_1 s) k_1] = \begin{bmatrix} e_1 & s & j_1 \\ L & \gamma & \gamma \\ e'_1 & s & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_1 & s & k_1 \\ e'_1 & s & k_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [e_1 || \gamma^{[L]} || e'_1] [s || \sigma^{[v]}] || s$$

On fait la même manipulation pour l'autre variable. D'où l'expression du terme direct de M :

$$\begin{bmatrix} L & L & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \gamma & \gamma & 0 \\ k_1 & k_2 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & J \\ k_1 & k_2 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & s & j_1 \\ L & \gamma & \gamma \\ e'_1 & s & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_1 & s & k_1 \\ e'_1 & s & k_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 & s & j_2 \\ L & \gamma & \gamma \\ e'_2 & s & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_2 & s & k_2 \\ e'_2 & s & k_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[e_1 || \gamma^{[L]} || e'_1] [e_2 || \gamma^{[L]} || e'_2] [s || \sigma^{[v]}] || s [s || \sigma^{[v]}] || s$$

AIH3.1.2 - Terme d'échange

Nous devons calculer le terme

$$\left[\left(j_1^{(1)} j_2^{(2)} \right)_J || \left(\gamma_{(1)}^{[L]} \gamma_{(2)}^{[L]} \right)^\circ \left(\sigma_{(1)}^{[v]} \sigma_{(2)}^{[v]} \right)^\circ \left(\tau_{(1)}^{[\mu]} \tau_{(2)}^{[\mu]} \right)^\circ || \left(k_1^{(2)} k_2^{(1)} \right)_J \right]$$

Pour se ramener au calcul précédent il suffit de changer l'ordre de couplage de k_1 et k_2 , ce qui introduit la phase $(-)^{k_1+k_2-J}$, et de changer dans les expressions k_1 en k_2 , e'_1 en e'_2 ;

d'où l'expression du terme d'échange de M :

$$\begin{bmatrix} L & L & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 \\ J & J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \gamma & \gamma & 0 \\ k_2 & k_1 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 & k_1 & J \\ k_2 & k_1 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 & s & j_1 \\ L & \gamma & \gamma \\ \ell_2' & s & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_2' & s & k_2 \\ \ell_2' & s & k_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_2 & s & j_2 \\ L & \gamma & \gamma \\ \ell_1' & s & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1' & s & k_1 \\ \ell_1' & s & k_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\ell_1 || Y^{[L]} || \ell_2'] [\ell_2 || Y^{[L]} || \ell_1'] [s || \sigma^{[j]} || s] [s || \sigma^{[j]} || s]$$

(-) $k_1 + k_2 - J$

AIH3.2 - Calcul du terme d'isospin

$$[(t_1 t_2)_T || \tau^{[\mu]} \tau^{[\mu]} || (t_1' t_2')_T]$$

La technique est la même; écrivons directement le terme direct et le terme d'échange :

$$\text{Direct} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & T \\ \mu & \mu & 0 \\ -t_1' & -t_2' & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1' & t_2' & T \\ t_1' & t_2' & T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [t_1 || \tau^{[\mu]} || t_1'] [t_2 || \tau^{[\mu]} || t_2']$$

$$\text{Echange} = (-)^{t_1' + t_2' - T} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & T \\ \mu & \mu & 0 \\ -t_2' & -t_1' & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2' & t_1' & T \\ t_2' & t_1' & T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (t_1 || \tau^{[\mu]} || t_2') [t_2 || \tau^{[\mu]} || t_1']$$

APPENDICE IV

TERMES DE MELANGE D'UNE FORCE SCALAIRE CENTRALE

Nous utilisons les notations suivantes :

$$a_0 + a_\sigma \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + a_\tau \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + a_{\sigma\tau} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 =$$

$$V^{S=0 \ T=0} P_1^\sigma P_1^\tau + V^{S=0 \ T=1} P_1^\sigma P_3^\tau + V^{S=1 \ T=0} P_3^\sigma P^\tau + V^{S=1 \ T=1} P_3^\sigma P_3^\tau ,$$

les P étant les opérateurs de projection sur les états singulets et triplets de spin et d'isospin, σ et τ étant les matrices de Pauli.

$$P_3^\sigma = \frac{1}{2} S^2 = \frac{1}{4} (3 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$$

$$P_1^\sigma = 1 - \frac{1}{2} S^2 = \frac{1}{4} (1 - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$$

Ces coefficients sont normalisés par la relation :

$$V^{S=1 \ T=0} = 1$$

La profondeur V_0 est prise négative pour un potentiel attractif.

APPENDICE V

DEVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE D'UNE FORCE CENTRALE GAUSSIENNE

Nous utilisons un facteur de forme du type Gaussien :

$$v(|\vec{r}-\vec{r}_p|) = e^{-\frac{r^2}{2\mu}}$$

avec :

$$\vec{r} = |\vec{r}-\vec{r}_p|$$

A partir du développement multipolaire de $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ et de l'expression de $v(\vec{r})$ suivante :

$$v(\vec{r}) = e^{-\frac{r^2+r_p^2}{2\mu}} e^{2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_p}{\mu}}$$

on obtient :

$$v(\vec{r}) = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} (i)^L j_L(2i \frac{r \cdot r_p}{\mu}) \sum_{m=-L}^{+L} \psi_{Lm}^*(-\hat{r}) \psi_{Lm}(\hat{r}_p),$$

les ψ_{Lm} étant ceux définis par Messiah . En utilisant les phases définies en appendice I :

$$v(|\vec{r}-\vec{r}_p|) = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sqrt{2L+1} \left\{ (-i)^L j_L(2i \frac{r \cdot r_p}{\mu}) \right\} [Y^L(\hat{r}) Y^L(\hat{r}_p)]^0 e^{-\frac{r^2+r_p^2}{2\mu}}$$

$[Y^L Y^L]^0$ désignant le couplage à 0 des harmoniques sphériques.

APPENDICE VI

CALCUL EXPLICITE DE $\varepsilon = \langle \psi_{\{\alpha'\}} | \theta_2 | \psi_{\{\alpha\}} \rangle$

$\psi_{\{\alpha\}}$ et $\psi_{\{\alpha'\}}$ sont deux déterminants de Slater normalisés portant sur les suites de configurations $\{\alpha\}$ et $\{\alpha'\}$. θ_2 est un opérateur à 2 corps symétrisé :

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^A \theta_2(x_i, x_j) = \sum_{i < j=1}^A \theta_2(x_i, x_j)$$

$$\theta_2(x_i, x_j) = \theta_2(x_j, x_i)$$

$$\psi_{\{\alpha\}} = \frac{1}{\sqrt{A!}} |\varphi_{\alpha_i}(x_k) \downarrow_i^{\rightarrow k}$$

Développons ce déterminant par rapport à la colonne k

$$\psi_{\{\alpha\}} = \frac{1}{\sqrt{A}} (-)^{P_k} \sum_{j=1}^A (-)^{P_j} \varphi_{\alpha_j}(x_k) \left\{ \frac{1}{\sqrt{(A-1)!}} |A-1| \right\}$$

le crochet désigne un déterminant de Slater normalisé portant sur A-1 états et sur les variables initiales sauf x_k . $(-)^{P_k}$ est la parité de la permutation qui amène k à la lère colonne $(-)^{P_j}$ est la parité de la permutation qui amène j à la lère ligne. Re commençons l'opération sur le déterminant d'ordre A-1. Développons-le par rapport à la colonne ℓ (different de k)

$$\psi_{\{\alpha\}} = \frac{1}{\sqrt{A(A-1)}} (-)^{P_k + P'_\ell} \sum_{j \neq i=1}^A (-)^{P_j + P'_i} \varphi_{\alpha_j}(x_k) \varphi_{\alpha_i}(x_\ell) \left\{ \frac{1}{\sqrt{(A-2)!}} |A-2| \right\} \quad (1)$$

$(-)^{P'_\ell}$ est la parité de la permutation qui amène ℓ à la lère colonne du déterminant d'ordre A-1 c'est-à-dire à la 2^è du déterminant initial. De même $(-)^{P'_i}$ est la parité de la permutation qui amène i à la 2^è ligne du déterminant initial.

Le crochet désigne un déterminant de Slater normalisé d'ordre A-2 ne portant pas sur les variables x_k et x_ℓ .

Par changement d'indice muet et sommation de deux expressions identiques à (1) on peut écrire :

$$\psi_{\{\alpha\}} = \frac{1}{\sqrt{2A(A-1)}} (-)^{P_k+P'_\ell} \sum_{j \neq i=1}^A (-)^{P_j+P'_i} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_j}(x_k) & \varphi_{\alpha_j}(x_\ell) \\ \varphi_{\alpha_i}(x_k) & \varphi_{\alpha_j}(x_\ell) \end{vmatrix} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(A-2)!}} |A-2| \right\}$$

L'intérêt de ce développement par rapport aux colonnes est que dans le calcul des éléments de matrices, les intégrales portant sur les déterminants d'ordre 2 et A-2 vont se séparer, étant sur des variables différentes. Ainsi

$$\varepsilon = \langle \psi_{\{\alpha'\}} | \theta_2 | \psi_{\{\alpha\}} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \neq \ell=1}^A \langle \psi_{\{\alpha'\}} | \theta_2(x_k, x_\ell) | \psi_{\{\alpha\}} \rangle$$

En effectuant un développement analogue pour $\psi_{\{\alpha'\}}$ il vient :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{2A(A-1)} \sum_{k \neq \ell=1}^A \sum_{m \neq n=1}^A \sum_{j \neq i=1}^A (-)^{P_j+P'_i+P_m+P'_n} \langle \widetilde{mn} | \theta_2(x_k, x_\ell) | \widetilde{ji} \rangle_n \int \left\{ (\det A-2) \right\}^* \left\{ (\det A-2) \right\} dx$$

avec les notations suivantes :

$|\widetilde{mn}\rangle_n$ est le déterminant de Slater normalisé des états m et n . L'antisymétrisation est notée par \sim et la normalisation par n . Nous utiliserons aussi $|\widetilde{mn}\rangle$ qui est le déterminant de Slater non normalisé.

La dernière intégrale sur les déterminants de Slater n'est non nulle en raison de l'orthogonalisation que si les deux déterminants portent sur les mêmes états ; par suite le couple d'états (m,n) est identique au couple (j,i) . Il en résulte que les 2 suites $\{\alpha\}$ et $\{\alpha'\}$ peuvent au plus différer par deux états.

Limitons nous au calcul de ε pour deux suites $\{\alpha\}$ et $\{\alpha'\}$ identiques.

L'élément de matrice à 2 corps est indépendant du nom des variables. Il y a $A(A-1)$ couple de variables $x_k x_\ell$. On peut donc se débarrasser de la somme sur k et ℓ :

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \sum_{i \neq j=1}^A \sum_{m \neq n=1}^A (-)^{P_j + P'_i + P'_m + P'_n} \langle \tilde{m}n | \theta_2 | \tilde{j}i \rangle_n$$

On a vu que $(i, j) = (m, n)$. A (ij) donné correspondent deux termes $i=m$ $j=n$ et $i=n$ $j=m$ qui sont égaux en raison de l'antisymétrisation et de la présence des signes de parité, d'où :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^A \langle \tilde{j}i | \theta_2 | \tilde{j}i \rangle_n$$

(si $i=j$ l'élément de matrice est nul).

On démontre très simplement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} {}_n \langle \tilde{a}b | \theta_2 | \tilde{c}d \rangle_n &= \sqrt{2} \langle ab | \theta_2 | \tilde{c}d \rangle_n \\ &= \frac{1}{2} \langle \tilde{a}b | \theta_2 | \tilde{c}d \rangle \\ &= \langle ab | \theta_2 | \tilde{c}d \rangle \\ &= \langle ab | \theta_2 | cd \rangle_{\text{direct}} - \langle ab | \theta_2 | dc \rangle_{\text{échange}} \end{aligned}$$

Propriétés de symétries :

$$\begin{aligned} \langle ab | \theta_2 | \tilde{c}d \rangle &= - \langle ab | \theta_2 | \tilde{d}c \rangle \\ &= - \langle ba | \theta_2 | \tilde{c}d \rangle \\ &= \langle ba | \theta_2 | \tilde{d}c \rangle \end{aligned}$$

APPENDICE VII

TABLEAU DES CONFIGURATIONS β

y	Configurations (spin isospin)	$A_\alpha A_{\alpha'}$	$\langle \alpha \beta_y \rangle^c \langle \alpha' \beta_y \rangle^f$	
$d_{5/2}$ $j_y = 5/2$ $t_y = 1/2$	$\alpha = \alpha' = d^2(01)s$	$\beta = \beta' = ds (30)^*$	$(-0, 16)^2$	$\frac{1}{2}$
		$\beta = \beta' = ds (31)$	"	"
		$\beta = \beta' = ds (21)$	"	"
		$\beta = \beta' = ds (20)$	"	"
	pas de termes non diagonaux car les couplages de β et β' doivent être identiques.			
	$\alpha = d^2(01)s$ $\alpha' = d^2(10)s$	$\beta = \beta' = ds (30)$	$2(-0, 16)^{***}(0, 41)$	$\frac{1}{2}$
		$\beta = \beta' = ds (31)$	"	"
		$\beta = \beta' = ds (21)$	"	"
		$\beta = \beta' = ds (20)$	"	"
	pas de non diagonaux			
	$\alpha = \alpha' = d^2(10)s$	$\beta = \beta' = ds (30)$	$(0, 41)^2$	$\frac{1}{2}$
		$\beta = \beta' = ds (31)$	"	"
$\beta = \beta' = ds (21)$		"	"	
$\beta = \beta' = ds (20)$		"	"	
pas de non diagonaux				
$\alpha = \alpha' = d^3$	$\beta = \beta' = dd(30)^{***}$	$(-0, 55)^2$	$\frac{1}{2}$	
	$\beta = \beta' = dd(21)$	"	$\frac{1}{2}$	

* Le principe de Pauli ne joue pas pour ces sous-couches différentes.

** Le facteur 2 provient de la somme $\sum_{\alpha\alpha'}$ ces termes étant non diagonaux.

*** Ici Pauli impose $j+t$ impair.

y	Configurations (spin isospin)	$A_\alpha A_{\alpha'}$	$\langle \alpha \beta \rangle^c \langle \alpha \beta \rangle^f \langle \alpha \beta \rangle^p$	
$s_{1/2}$ $j_y = 1/2$ $t_y = 1/2$	$\alpha = \alpha' = s^3$	$\beta = \beta' = s^2 (0,1)$ $(0,71)^2$	$\frac{1}{2}$	
		$\beta = \beta' = s^2 (10)^*$ $(0,71)^2$	$\frac{1}{2}$	
		pas de termes non diagonaux car les couplages des β seraient différent		
	$\alpha = s^3$ $\alpha' = d^2 s$	non car β et β' doivent comporter les mêmes sous-couches.		
	$\alpha = \alpha' = d^2 (01)s$	$\beta = \beta' = d^2 (01)^*$ $(-0,16)^2$	1	
	$\alpha = d^2 (01)s$ $\alpha' = d^2 (10)s$	non car couplage des β et β' différent.		
	$\alpha = \alpha' = d^2 (10)s$	$\beta = \beta' = d^2 (10)$ $(0,41)^2$	1	

* Ici Pauli impose $j+t$ impair.

APPENDICE VIII

VALEUR DE $\mathcal{A}_{y j_{\lambda} t_{\lambda}^J T=1}$ POUR $y = s1/2$ et $d5/2$

$y = s1/2$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{s j_{\lambda} t_{\lambda}^J T=1} &= \left\{ \begin{matrix} j_{\beta} & t_{\beta} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & j_{\lambda} & J \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & t_{\lambda} & T \end{bmatrix} \end{matrix} \right\}^2 \left[(0,71)^2 \frac{1}{2} + (-0,16)^2 \right] \\ &+ \left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & j_{\lambda} & J \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & t_{\lambda} & T \end{bmatrix} \end{matrix} \right\}^2 \left[(0,71)^2 \frac{1}{2} + (0,41)^2 \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & j_{\lambda} & J \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & t_{\lambda} & T \end{bmatrix}^2 0,27765 + \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & j_{\lambda} & J \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & t_{\lambda} & T \end{bmatrix}^2 0,4201 \end{aligned}$$

$y = d5/2$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{d j_{\lambda} t_{\lambda}^J T=1} &= \left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & j_{\lambda} & J \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & j_{\lambda} & J \end{bmatrix}^2 \right\} \left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & t_{\lambda} & T \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & t_{\lambda} & T \end{bmatrix}^2 \right\} \\ &\left[(0,16)^2 \frac{1}{2} + (0,41)^2 \frac{1}{2} + 2(-0,16)(0,41) \frac{1}{2} \right] \\ &+ \left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & j_{\lambda} & J \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & t_{\lambda} & T \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 3 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & j_{\lambda} & J \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & t_{\lambda} & T \end{bmatrix}^2 \right\} (0,55^2) \frac{1}{2} \\ &= \{ \quad \} 0,03125 + \{ \quad \} 0,15125 \end{aligned}$$

REFERENCES

- [1] - Polarized Targets and Ion Sources - Proceedings of International Conference on Polarized Targets and Ion Sources, Saclay, France (1966)
- [2] - M. GOLDMAN, M. CHAPPELLIER et VU HOANG CHAU - Communication privée
- [3] - A. ABRAGAM et P. MERIEL - Communication privée
- [4] - A. ARIMA, S. COHEN, R. LAWSON and M. Mac FARLANE - Nucl. Phys. A108(1968)94
- [5] - A. MESSIAH - Mécanique Quantique (Dunod) Chapitre X-20
- [6] - A. MESSIAH - Mécanique Quantique (Dunod) Chapitre IX-2
- [7] - J. RAYNAL - Cours d'Aussois p. 191 (1968)
- [8] - Hartree, Numerical Analysis p. 180
- [9] - A. MESSIAH - Mécanique Quantique (Dunod) Chapitre X-12
- [10] - D. VAUTRIN - Thèse
- [11] - N. TICHIT - Thèse
- [12] - V. GILLET, B. GIRAUD et M. RHO - Phys. Rev. 178, 1695 (1969)
- [13] - D.M. BRINK et E. BOEKER - Nucl. Phys. A91, 1 (1967)
- [14] - G. RIPKA - Thèse, Appendice
- [15] - M. DANOS - A paraître dans Ann. of Physics ("De Shalit Memorial")